

МОДЕЛЬ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ ЭПИДЕМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

А.В. Боровский¹, А.Л. Галкин²

¹ Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация

² Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, г. Москва, Российская Федерация

Информация о статье

Дата поступления
12 апреля 2021 г.

Дата принятия к печати
21 июня 2021 г.

Дата онлайн-размещения
9 июля 2021 г.

Ключевые слова

Математическое моделирование эпидемий; теоретические модели эпидемий; эпидемическая кинетика; модель эпидемии с запаздыванием

Аннотация

Распространение инфекционных заболеваний негативно сказывается на социально-экономических показателях развития страны, ведет к ухудшению качества жизни граждан. В связи с этим представляется актуальным теоретическое исследование процесса пространственного распространения эпидемий. Целью данной работы является исследование модели эпидемической кинетики с запаздыванием по времени численными методами, в том числе асимптотических свойств эпидемического процесса в зависимости от источника заражения. В статье предложена новая теоретическая модель эпидемической кинетики, учитывающая скрытый инкубационный период заболевания в виде слагаемых с запаздыванием во времени. Модель учитывает четыре вида членов популяции — неинфицированных, не обладающих иммунитетом, активно инфицированных, выздоровевших и приобретших иммунитет, испытавших летальный исход. Разработанная модель эпидемической кинетики с запаздыванием учитывает возможность инфицирования членов популяции на интервале времени, равном инкубационному периоду заболевания, а также смертность только вне инкубационного периода. Предлагаемая модель эпидемической кинетики с запаздыванием позволяет системным образом изучать влияние различных эффектов на эпидемическую кривую, благодаря чему на практике возможно прогнозировать развитие эпидемической ситуации для введения необходимых противоэпидемических мер, что особенно актуально в условиях разразившейся мировой пандемии коронавируса.

MODEL OF QUASI-STATIONARY EPIDEMIC KINETICS

Andrei V. Borovsky¹, Andrei L. Galkin²

¹ Baikal State University, Irkutsk, the Russian Federation

² Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, the Russian Federation

Article info

Received
April 12, 2021

Accepted
June 21, 2021

Available online
July 9, 2021

Keywords

Mathematical modeling of epidemics; theoretical models of epidemics; epidemic kinetics; lag epidemic model

Abstract

A new theoretical model of epidemic kinetics, which takes into account the latent incubation period of the disease in the form of time lagged terms, is viewed. The model takes into account four types of population members: the uninfected (non-immune), the actively infected, the recovered and acquired immunity, and the experienced a lethal outcome. The model considers the possibility of introducing anti-epidemic measures smoothly, as well as the presence of various types of infection of the uninfected contingent. Numerical calculations of the epidemic development show that the initial exponential growth of actively infected people after the introduction of quarantine measures is replaced by a decline in the epidemic curve within two — three weeks. Then, after three months, having a permanent source of infection, the epidemic enters a quasi-stationary mode of functioning. The quasi-stationary values statistics of actively infected individuals uniquely determines the size of the infection source. Calculations of the problem with a time-varying infection source describe the «second wave» of a separate intensity epidemic.

Введение

Распространение инфекционных заболеваний оказывает большое влияние на жизнь людей. Они останавливают социально-экономическое развитие общества, отрицательно отражаются на демографических показателях, ухудшают качество жизни граждан. Все эти процессы нуждаются в изучении, причем в его основе должны лежать эпидемические модели. Их изучение приобретает особую актуальность в условиях разразившейся мировой пандемии коронавируса.

В медицинской литературе основоположниками теории эпидемий считают Даниила Бернулли, Уильяма Фарра, Петра Енько, Джона Браунли. Ссылки на их труды можно найти в Медицинской энциклопедии, Большой Советской Энциклопедии, а также в Википедии. Известны также труды их последователей [1–5]. Все работы делятся на два вида. Одни развивают теоретико-вероятностный подход для описания пространственного распространения эпидемии, другие используют балансный подход, применимый для населенного пункта. Эпидемический процесс во втором виде этих классических работ описывается с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений эпидемической кинетики, решения которых характеризуют изменение численности в различных подгруппах популяции (восприимчивые, зараженные, иммунные, выздоровевшие и т.д.).

Математическая модель эпидемии гриппа Барояна — Рвачева [6] представляет собой уже систему нелинейных интегродифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими граничными и начальными условиями. В интегральной части модели [7] исследователи пытаются учесть особенности вируса при развитии инфекционного процесса (мутации вируса), в том числе в период инкубации. Наряду с обычной характеристикой в виде средней частоты передачи возбудителя, модель отягощена такими понятиями, как функция развития периода инкубации и функция развития инфекционного периода. Модель оправдывает классификацию как эпидемическая динамика, поскольку описывает волнообразное распространение эпидемии между городами при учете пассажиропотоков.

Проблемы прогнозирования эпидемий, верификации теоретических моделей, описания локальных вспышек инфекции представлены в статьях [8–10]. Ход эпидемии коронавируса разбирался в интернет-статьях [11; 12]. Их авторы делают вывод, что эпидемия коронавируса не описывается известными

моделями эпидемической кинетики (SIR, SIS, SEIR, MSEIR). В работе [13] рассматривалось развитие эпидемии коронавируса в Австрии на основе дискретной модели.

В данной работе, следуя [14; 15], развивается новая модель эпидемической кинетики. Эта модель использует физическую аналогию с кинетикой заселенностей уровней атома [16]. Отличие рассматриваемой модели от известной модели SIR заключается в дополнительном учете запаздывающих слагаемых, а также наличии у известных слагаемых временной задержки. Модель эпидемической кинетики с запаздыванием учитывает возможность инфицирования членов популяции на интервале времени равном инкубационному периоду заболевания, а также смертность только вне инкубационного периода. В результате в уравнениях появляются переменные в момент времени t и $t - \tau$, где τ — длительность скрытого инкубационного периода заболевания. Модель является открытой, т.е. может учитывать для населенного пункта внешний источник заражения, что еще больше приближает ее к реальной ситуации. Модель эпидкинетики позволяет рассчитать эпидемическую кривую — зависимость от времени числа активных инфицированных членов популяции.

Отметим, что предлагаемая модель эпидемической кинетики с запаздыванием в отличие от дискретной модели [13] позволяет системным образом изучать влияние различных эффектов на эпидемическую кривую. К их числу относятся: экспоненциальный рост активно инфицированных лиц на начальном этапе эпидемии, влияние противоэпидемических мер и их плавного введения на ограничение роста эпидемической кривой, влияние длительности инкубационного периода и времени течения болезни на эпидемическую кривую, учет наличия амбулаторных больных и группы лиц, бессимптомно переносящих заболевание, и др.

Целью данной работы является исследование модели эпидемической кинетики с запаздыванием по времени численными методами, в том числе асимптотических свойств эпидемического процесса в зависимости от источника заражения. Отметим также, что предлагаемая модель относится к изучению эпидемии в городе. Ее не следует применять в целом к стране, состоящей из совокупности городов и сельской местности. В этом случае ситуация усложняется наличием пассажиропотоков между населенными пунктами и зарубежными странами, что требует применения более сложных моделей.

Скорость заражения в населенном пункте

Анализ различных видов заражения, возможных в населенном пункте (город, поселок, вахтовое производство), проведенный авторами данной работы, позволяет записать следующее общее выражение для скорости изменения активно инфицированного контингента:

$$\frac{dN_2}{dt} = k_1^- \psi_1(t, t-\tau, t-(\tau+\tau^+)) + k_2^- \psi_2(t, t-\tau, t-(\tau+\tau^+)) - k^+ N_2(t) - k^c N_2(t-\tau) + A. \quad (1)$$

Здесь первых два слагаемых в правой части (1) описывают два основных вида заражения. Первый относится к заражению неинфицированных лиц в небольших устойчивых коллективах. (Это заражение на производстве, в учреждениях, в организациях среднего, специального и высшего образования. Сюда же относится заражение в городском транспорте, в небольших магазинах, кафе и ресторанах и других предприятиях сферы обслуживания, спорта и культуры.) Второй вид заражения происходит в многоквартирных домах и осуществляется через общие инженерные системы (подъезд, лифт, мусоропровод, вентиляция, канализация). Функции ψ_1 и ψ_2 описывают количество инфицированных членов популяции, участвующих в первом и втором виде заражения. Они различаются, так как в первом виде заражения участвуют граждане, которые выходят на улицы, а во втором случае добавляются амбулаторные больные. Коэффициенты k_1^- и k_2^- — частота заражения для первого и второго случаев, τ — длительность инкубационного периода, τ^+ — время выздоровления.

Отрицательные слагаемые в (1) описывают скорость выздоровления и летального исхода. Слагаемое A отвечает постоянно действующему источнику заражения, например скорости заражения в медицинских учреждениях, а также в результате прибытия инфицированных лиц с внешним пассажиропотоком.

Авторы допускают, что частотные коэффициенты в выражении (1) должны быть подвергнуты медицинской верификации. Для этого нужно обладать необходимым объемом медицинской статистики. В данной статье для установления общих закономерностей ограничимся модельным подходом.

Численные исследования уравнений эпидемической кинетики с запаздыванием

Скорость заражения (1) содержит основные слагаемые. Если ограничиться их учетом

и не принимать во внимание сезонную миграцию населения, то уравнения эпидемической кинетики, учитывающие запаздывание, принимают вид [15]:

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt}(t) &= -k^- |N_2(t) - N_2(t-\tau)| - A, \\ \frac{dN_2}{dt}(t) &= k^- |N_2(t) - N_2(t-\tau)| - k^+ N_2(t) - k^c N_2(t-\tau) + A, \\ \frac{dN_3}{dt}(t) &= k^+ N_2(t), \\ \frac{dN_4}{dt}(t) &= k^c N_2(t-\tau). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь N_0 — численность популяции за вычетом доли, имеющей иммунитет к заболеванию. N_1, N_2, N_3, N_4 — численность здоровых, не имеющих иммунитета; инфицированных; выздоровевших и испытавших летальный исход членов популяции; все переменные берутся в момент времени t . Для заболевания COVID-19, вызванного коронавирусом SARS-CoV-2 (в отличие, например, от гриппа), примем время выздоровления $\tau^+ = 15$ суток, тогда частота выздоровления есть обратная величина $k^+ = 1/15$ сутки⁻¹. Аналогично частота летального исхода $k^c = 1/50$ сутки⁻¹. Длительность инкубационного периода $\tau = 7$ суток; частота заражения представлена выражением

$$k^-(t) = \rho(t) \Delta n(t) = \rho(t) \Delta n_0(t) \frac{N_1(t)}{N_0}, \quad \sum_{i=1}^4 N_i(t) = N_0. \quad (3)$$

Используются следующие выражения для частоты контактов и вероятности заражения:

$$\Delta n(t) = \begin{cases} \Delta n_{in}, & 0 < t < t' \\ \Delta n_{in} - (\Delta n_{in} - \Delta n_f) \frac{t-t'}{t''-t'}, & t' \leq t \leq t'' \\ \Delta n_f, & t'' \leq t \end{cases}$$

$$\rho(t) = \begin{cases} \rho_{in}, & 0 < t < t' \\ \rho_{in} - (\rho_{in} - \rho_f) \frac{t-t'}{t''-t'}, & t' \leq t \leq t'' \\ \rho_f, & t'' \leq t \end{cases} \quad (4)$$

Формулы (4) описывают плавное введение санитарных норм. Обозначения $\Delta n_{in}, \Delta n_f, \rho_{in}, \rho_f$ соответствуют начальному и конечному значениям частоты контактов и вероятности заражения.

Постановку задачи (2) следует дополнить условием неотрицательности искомым функций и начальными условиями, например:

$$\begin{aligned} N_i(t) &\geq 0, \quad i = 1, \dots, 4, \quad N_i(0) = N_0, \\ N_2(0) &= 1, \quad N_3(0) = 0, \quad N_4(0) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Для численного решения задачи эпидемиологии (1)–(5) используется разностная схема, особенностью которой является запоминание предыстории к данному моменту t (например, с шагом 0,1 суток) уже полученных функций $N_i(s)$, $s \leq t$.

В приближении $N_1(t) \approx N_0 (k^-(t))$ в (3) не зависит от $N_1(t)$, второе уравнение в (2) становится независимым, остальные компоненты определяются через это решение $N_2(t)$.

В приближении $N_1(t) \approx N_0$ на малых временах без учета запаздывания из второго уравнения системы (2)

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = (k^-(0) - k^+)N_2(t) + A$$

получаем аналитическое выражение

$$\begin{aligned} N_2(t) &= N_2(0)e^{(k^-(0) - k^+)t} + \frac{A}{(k^-(0) - k^+)} \times \\ &\times \left[e^{(k^-(0) - k^+)t} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Вспышка заболеваемости (6) при положительном инкременте $k^-(0) - k^+ > 0$ может гаситься только за счет запаздывающих слагаемых в (2), рис. 1. В расчетах принято $\Delta n_{in} = 30$, $\Delta n_f = 20$ и $p_{in} = 0,01$,

$p_f = 0,005$. Отметим, что волнистое поведение N_2 справа от максимума обусловлено сложной структурой второго уравнения системы (2).

При более интенсивном развитии эпидемии (инкремент имеет более высокие положительные значения, $\Delta n_{in} = 34,5$, $\Delta n_f = 23$ и $p_{in} = 0,01$, $p_f = 0,005$) спад эпидемической кривой определяется спадом $k^-(t)$ вследствие принятия карантинных мер (рис. 2, 3).

Ход эпидемической кривой на рис. 2, 3 показывает крайне опасную ситуацию, возникающую из-за опоздания введения санитарных мер. При начале введения санитарных мер через 30 и 50 дней с момента начала эпидемии количество одновременно инфицированных достигает 1 400 и 25 000 членов популяции.

На рис. 4 представлена эпидемическая кривая, когда в населенном пункте действует постоянный источник заражения. Таким источником может быть инфицированный контингент, прибывающий в населенный пункт с внешним пассажиропотоком. Другим вариантом может быть заражение населения в медицинских учреждениях.

Сместим реализацию санитарных мер на 20-й день с начала эпидемии. Получим уменьшение инфицированного контингента до 3 500 чел. на 30-й день с последующим уменьшением. По статистике коронавирусной инфекции в РФ на коечный фонд в больницах попадает примерно пятая часть от числа инфицированных на данный момент. В рассмотренном варианте число госпитализированных составит 700 больных.

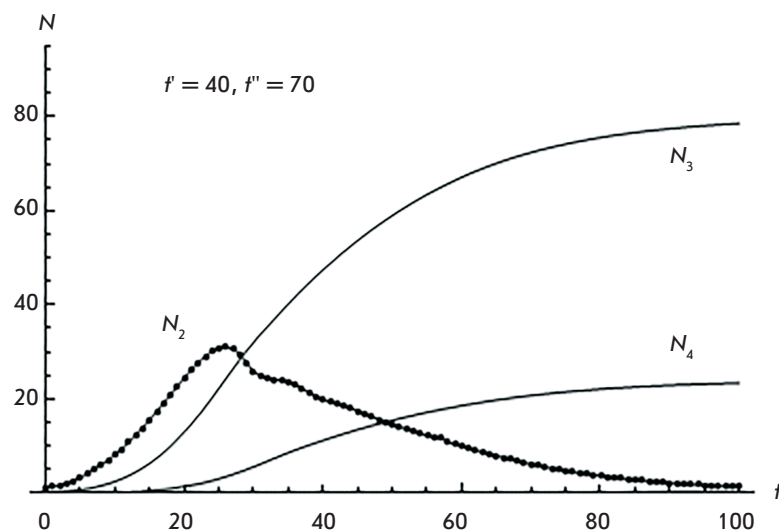


Рис. 1. Решение системы (2) без источника ($A = 0$) с $N_1(0) = N_0 = 6 \cdot 10^5$ (Иркутск), $f' = 40$, $f'' = 70$ в коэффициентах (4)

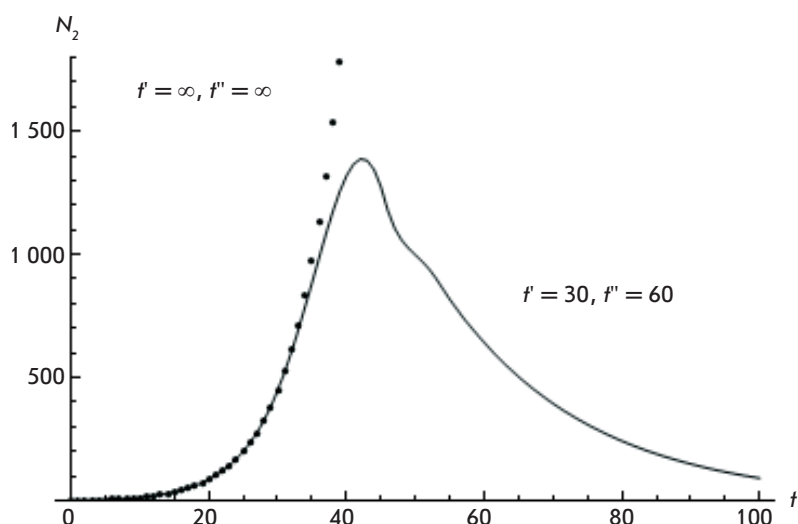


Рис. 2. Решение системы (2) без источника ($A = 0$) с $N_0 = 6 \cdot 10^5$ (Иркутск), $f' = 30$, $f'' = 60$ в коэффициентах (4) и $\Delta n_{in} = 34,5$, $\Delta n_f = 23$

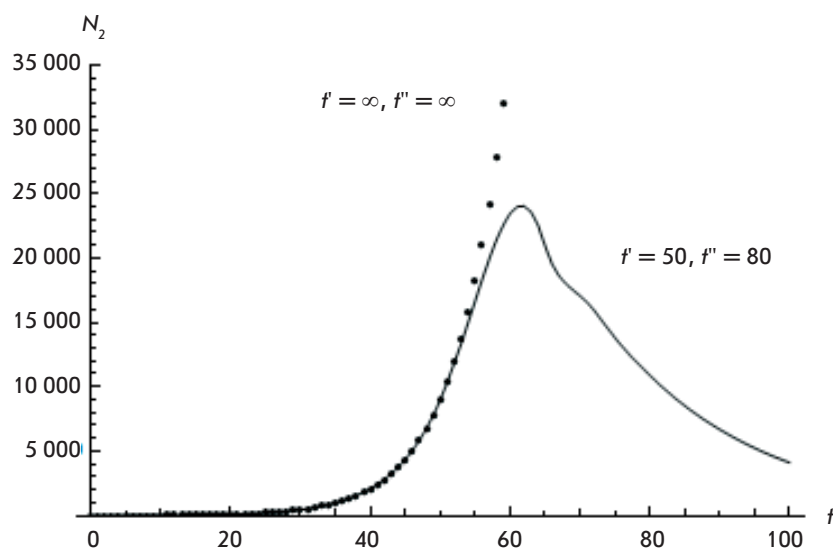


Рис. 3. Решение системы (2) без источника ($A = 0$) с $f' = 50$, $f'' = 80$ в коэффициентах (4) и $\Delta n_{in} = 34,5$, $\Delta n_f = 23$

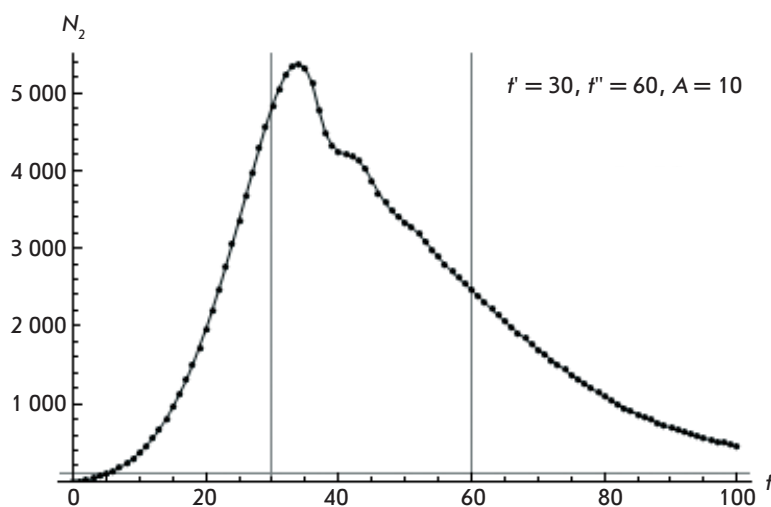


Рис. 4. Решение системы (2) с источником ($A = 10$) с $f' = 30$, $f'' = 60$ в коэффициентах (4) и $\Delta n_{in} = 30$, $\Delta n_f = 20$

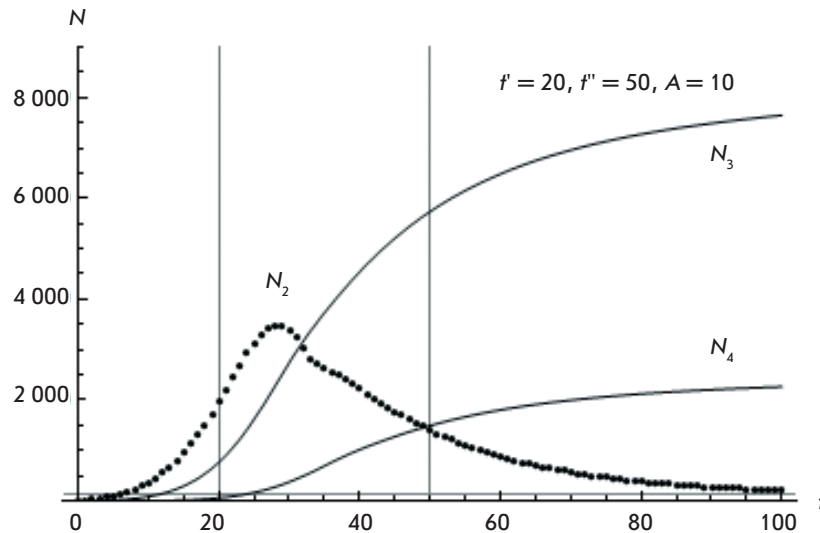


Рис. 5. Решение системы (2) с источником ($A = 10$), $t' = 20$, $t'' = 50$ в коэффициентах (4) и $\Delta n_m = 30$, $\Delta n_f = 20$

Стационарный режим развития эпидемии

В стационарном случае:

$$\frac{dN_2}{dt} = k^- |N_2(t) - N_2(t - \tau)| - k^+ N_2(t) - k^c N_2(t - \tau) + A,$$

$$N_2(t) = N_2(t - \tau) \quad (7)$$

решение имеет вид

$$N_2 = \frac{A}{(k^+ + k^c)}. \quad (8)$$

Стационарное значение (8) не зависит от N_0 , k^- . Остальные компоненты определяются через (8):

$$N_1 \sim -At, N_3 \sim \frac{k^+ At}{(k^+ + k^c)}, N_4 \sim \frac{k^c At}{(k^+ + k^c)},$$

т.е. стационарным является только число инфицированных. Отметим, что соотношение (7) означает отсутствие инфицированных в течение инкубационного периода. Поэтому решение (2) не выходит на стационарное решение (8), а только асимптотически к нему приближается. Источник $A = const > 0$ приводит к постоянному суточному приросту зараженных, который компенсируется убылью активно инфицированных в результате выздоровлений и летальных исходов. Так как $k^+ \gg k^c$, то

$$N_2 = At^+. \quad (9)$$

Таким образом в стационарном режиме развития эпидемии количество активно инфицированных равно числу инфицируемых в сутки, умноженному на время выздоровле-

ния. Если $A = 10$, $t^+ = 15$, то $N_2 = 150$ инфицированных.

Это обстоятельство может быть использовано для определения интенсивности источника постоянного заражения по наиболее достоверной части эпидемической статистики. Вертикальными прямыми на рис. 4, 5 отмечена область нарастания карантинных мер, горизонтальной прямой — целочисленное стационарное значение 115.

Сравнение рис. 2, 4, 5 показывает, что появление стационарного источника заражения в количестве 10 чел/сутки приведет к росту одновременно инфицированных с 1 500 до 5 400 членов популяции при начале введения санитарных мер на 30-й день эпидемии и до 3 500 инфицированных при начале введения санитарных мер на 20-й день эпидемии.

Рассмотрим задачу с переменным во времени источником

$$A(t) = A \left\{ 1 + a e^{-\left(\frac{t-t_0}{\Delta t}\right)^2} \right\}. \quad (10)$$

Два варианта параметров:

Вариант 1: $A = 10$ чел/сутки; $a = 1,5$; $t_0 = 210$ суток; $\Delta t = 45$ суток.

Вариант 2: $A = 10$ чел/сутки; $a = 26$; $t_0 = 210$ суток; $\Delta t = 60$ суток.

Результаты расчета представлены на рис. 6 (сплошные графики с цифрами 1,2) в сравнении с действием постоянного источника $A = 10$ (точки). Пунктиром построены графики для двух вариантов (1,2, цифры штрихованные) по формуле

$$N_2(t) = \frac{A(t)}{(k^+ + k^c)}. \quad (11)$$

На больших временах расчеты с переменным источником и с постоянным источником дают одинаковый асимптотический предел $\frac{10}{(k^+ + k^c)}$ для $N_2(t)$. Такой же предел при малых временах имеют пунктирные графики. Диапазон $t \geq 100$ можно рассматривать как квазистационарный (изменения $N_2(t)$ за время инкубации мало, что не совсем выполняется для второго варианта). Временной ход $N_2(t)$ в квазистационарном диапазоне повторяет временной ход $A(t)$ с небольшим сдвигом. Это означает, что для решения обратной задачи определения источника $A(t)$ по статистике $N_2(t)$ в первом приближении можно использовать обращение соотношения (8):

$$A(t) = N_2(t)(k^+ + k^c).$$

Сравнение численного и аналитического стационарных значений дает дополнительную оценку погрешности методики — совпадение пяти знаков.

Отметим, что рассмотренные варианты расчета задачи с переменным во времени источником описывают вторую волну эпидемии различной интенсивности.

Дополнительное заражение бессимптомными инфицированными

Введем в задачу модифицированную скорость заражения

$$\begin{aligned} \frac{dN_2}{dt}(t) = k^- \{ & 0,8|N_2(t) - N_2(t-\tau)| + 0,2|N_2(t) - \\ & - N_2(t - (\tau + \tau^+))| \} - k^+ |N_2(t) - N_2(\tau + \tau^+)| - \\ & - k^c N_2(t-\tau) + A. \end{aligned} \quad (12)$$

В (12) учитывается заражение населения не только в инкубационный период заболевания, но также бессимптомными инфицированными в течение всего периода болезни. Скорость выздоровления взята на интервале заболевания. Результаты моделирования уравнений эпидемической кинетики с запаздыванием со скоростью (12) представлены на рис. 7.

Заключение

В работе представлено исследование новой эпидемической модели с запаздывающими членами. Системный анализ различных видов заражения приводит к скорости инфицирования (1). Выделение главных слагаемых в (1) позволяет редуцировать скорость заражения к видам (2) и (12). Численное решение системы нестационарных уравнений эпидемической кинетики представлено на рис. 1–7. Решения позволяют учесть плавное введение противоэпидемических мер, а именно: привыкание населения к ношению масок и введение частичных карантинных мер, связанное с уменьшением частоты контактов населения. Показано, что решения чувствительны к временной задержке при введении противо-

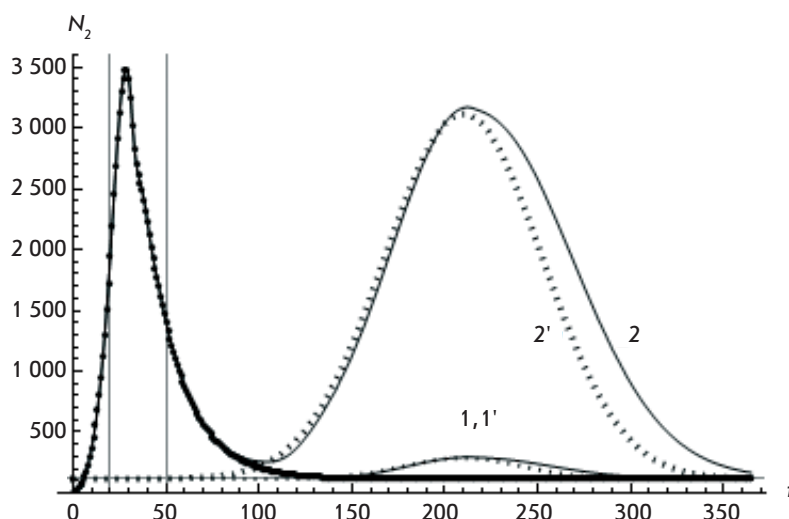


Рис. 6. Решение системы (2) со скоростями заражения (2) и (10), $t' = 20$, $t'' = 50$ в коэффициентах (4) и $\Delta n_{in} = 30$, $\Delta n_i = 20$ с постоянным источником $A = 10$ (точки) и двумя вариантами переменного источника (10) (сплошные кривые 1,2)

Примечание: пунктиром построены графики для двух вариантов (1,2, цифры штрихованные) по формуле (11).

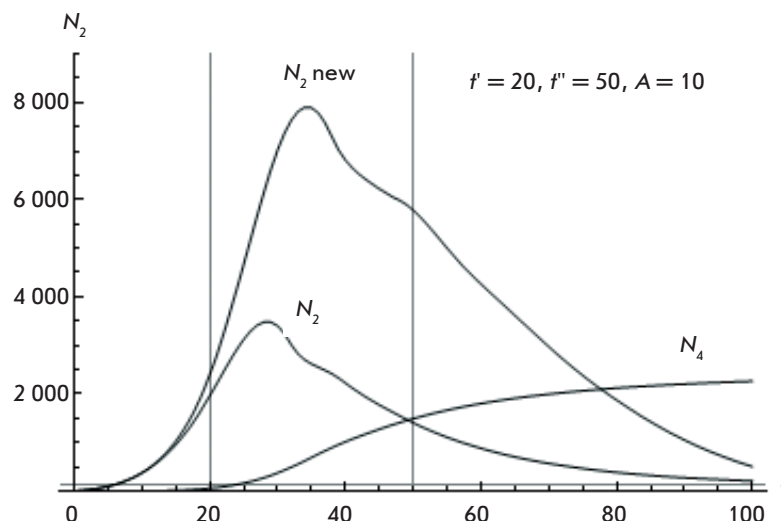


Рис. 7. Решение системы (2) со скоростями заражения (2) и (12) с источником ($A = 10$), $f' = 20$, $f'' = 50$ в коэффициентах (4) и $\Delta n_m = 30$, $\Delta n_f = 20$

эпидемических мер. Характерный вид эпидемической кривой для города с численностью населения 600 тыс. чел. показан на рис. 5–7. Прототипом является город Иркутск.

Примерно через 80 дней с момента начала введения противоэпидемических мер количество инфицированных граждан, пройдя через пик, стремится к стационарному значению (8). В дальнейшем эпидемический процесс развивается по квазистационарному сценарию, когда постоянный источник заражения в (1) приводит к постоянному числу инфицированных (8) в населенном пункте. Для подавления инфекции нужно вводить полный карантин, т.е. закрывать населенный пункт от внешнего пассажиропотока. Кроме того, необходимо вводить строгие санитарные меры по обслуживанию населения в медицинских учреждениях, препятствующие заражению граждан. Выход статистической кривой для активно инфицированных на плато¹ не является признаком спада эпидемии, а свидетельствует о неподавленном квазистационарном источнике заражения. Если населенный пункт не закрывать, то эпидемия охватывает все регионы и повсюду развивается в квазистационарном режиме. Соответствующим математическим аппаратом для теоретического описания такой ситуации может являться уравнение

¹Коронавирус: статистика // Яндекс. URL: https://yandex.ru/covid19/stat?utm_source=main_notif&geold=11266.

Фоккера — Планка или статистическая теория с применением уравнений Колмогорова.

На нестационарном этапе развития эпидемии, который продолжается примерно 100 дней с момента начала эпидемии, существенное влияние на количественные характеристики числа переболевших оказывает бессимптомное инфицирование части населения (рис. 7). Например, на конец марта, по официальной статистике в г. Иркутске (население — 650 тыс. чел.), переболело 38 тыс. чел., что составляет 6 % населения. В то же время проводимая вакцинация показывает, что процент населения, обладающего иммунитетом, составляет 45 %. Вакцинировано на конец марта 4 % населения города. Это означает, что около 35 % населения переболели бессимптомно, либо обошлись самолечением.

Проведенные расчеты с переменным во времени квазистационарным источником заражения демонстрируют возможность описания второй волны эпидемии различной интенсивности в рамках рассматриваемой теории, а также подход к определению величины источника заражения в квазистационарном приближении по статистике активно инфицированного контингента. Более точное определение источника заражения $A(t)$ может производиться путем решения обратной задачи $N_3(t, A(t)) = N_3^{st}(t)$, где правая часть — данные статистики, а левая часть — решение системы (2).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kermack W.O. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics / W.O. Kermack, A.G. McKendrick // Journal of the Royal Statistical Society. Series A: Statistics in Society. — 1957. — Vol. 120, iss. 1. — P. 48–60.
2. Bartlett M.S. Measles Periodicity and Community Size / M.S. Bartlett // Proceedings of The Royal. Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 1927. — Vol. 115, iss. 772. — P. 700–721.

3. Stochastic Two-Agent Epidemic Simulation Models for a Community of Families / L. Elveback, E. Ackerman, L. Gatewood, J. Fox // *American Journal of Epidemiology*. — 1971. — Vol. 93, № 4. — P. 267–280.
4. Бейли Н. Математика в биологии и медицине / Н. Бейли ; пер. с англ. Е.Г. Коваленко. — Москва : Мир, 1970. — 326 с.
5. Bartlett M.S. An Introduction to Stochastic Processes, with Special Reference to Methods and Applications / M.S. Bartlett. — Cambridge : At the University Press, 1978. — 388 p.
6. Бароян О.В. Моделирование и прогнозирование эпидемий гриппа для территории СССР / О.В. Бароян, Л.А. Рвачев, Ю.Г. Иванников. — Москва : Изд-во ин-та эпидемиологии и микробиологии им. Н.Ф. Гамалеи АМН СССР, 1977. — 546 с.
7. Боев Б.В. Прогнозно-аналитические модели эпидемий (оценка последствий техногенных аварий и природных катастроф) : лекция / Б.В. Боев. — URL: <https://armscontrol.ru/course/lectures05a/bvb050324.pdf>.
8. Современное состояние проблемы математического моделирования и прогнозирования эпидемического процесса / А.А. Лопатин, В.А. Сафронов, А.С. Раздорский, Е.В. Куклев // *Проблемы особо опасных инфекций*. — 2010. — № 3 (105). — С. 28–30.
9. Верификация математических моделей при чуме / А.А. Лопатин, Е.В. Куклев, В.А. Сафронов [и др.] // *Проблемы особо опасных инфекций*. — 2012. — № 3 (113). — С. 26–28.
10. Бачинский А.Г. Универсальная модель локальных эпидемий, вызываемых возбудителями особо опасных инфекций: моделирование новых инфекций / А.Г. Бачинский, Л.Ф. Низоленко // *Проблемы особо опасных инфекций*. — 2015. — № 1. — С. 51–53.
11. Тамм М.В. Коронавирусная инфекция в Москве: прогнозы и сценарии / М.В. Тамм // *Фармакоэкономика. Современная фармакоэкономика и фармакоэпидемиология*. — 2020. — Т. 13, № 1. — С. 43–51.
12. Иванов М.В. Математическое моделирование процесса пандемии / М.В. Иванов // *Институт развития стратегических инициатив (ИРСИ)*. — 2020. — 30 апр. — URL: <https://indsi.ru/2020/04/30>.
13. Trigger S.A. Equation for Epidemic Spread with the Quarantine Measures: Application to COVID-19 / S.A. Trigger, E.B. Czerniawski. — DOI 10.1088/1402-4896/abb2e2 // *Physica Scripta*. — 2020. — Vol. 95, № 10. — P. 105001.
14. Боровский А.В. Модель эпидемии с запаздыванием / А.В. Боровский // *System Analysis and Mathematical Modeling*. — 2020. — Т. 2, № 4. — С. 53–63.
15. Боровский А.В. Математическая модель эпидемии со скрытым инкубационным периодом заражения / А.В. Боровский, А.Л. Галкин // *Передовое развитие современной науки как драйвер роста экономики и социальной сферы : труды 2-й Всерос. науч.-практ. конф., Петрозаводск, 20 дек. 2020 г.* — Петрозаводск, 2020. — С. 182–186.
16. Плазма многозарядных ионов. Элементарные процессы, кинетика и рентгеновские лазеры / А.В. Боровский, С.А. Запругаев, О.И. Зацаринный, Н.Л. Манакон. — Санкт-Петербург : Химия : С.-Петерб. отд-ние, 1995. — 342 с.

Информация об авторах

Боровский Андрей Викторович — доктор физико-математических наук, профессор, кафедры математических методов и цифровых технологий, Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация, e-mail: andrei-borovskii@mail.ru.

Галкин Андрей Леонидович — доктор физико-математических наук, Институт общей физики им. А.М. Прохорова Российской академии наук, г. Москва, Российская Федерация, e-mail: galkin@kapella.gpi.ru.

Для цитирования

Боровский А.В. Модель квазистационарной эпидемической кинетики / А.В. Боровский, А.Л. Галкин. — DOI 10.17150/2500-2759.2021.31(2).221-229 // *Известия Байкальского государственного университета*. — 2021. — Т. 31, № 2. — С. 221–229.

Authors

Andrei V. Borovsky — D.Sc. in Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Mathematical Methods and Digital Technologies, Baikal State University, Irkutsk, the Russian Federation, e-mail: andrei-borovskii@mail.ru.

Andrei L. Galkin — D.Sc. in Physical and Mathematical Sciences, Prokhorov General Physics Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, the Russian Federation, e-mail: galkin@kapella.gpi.ru.

For Citation

Borovsky A.V., Galkin A.L. Model of Quasi-Stationary Epidemic Kinetics. *Izvestiya Baikalskogo gosudarstvennogo universiteta = Bulletin of Baikal State University*, 2021, vol. 31, no. 2, pp. 221–229. DOI: 10.17150/2500-2759.2021.31(2).221-229. (In Russian).